ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 44, No. 1, 1983

ESPACES DE BANACH SUPERSTABLES, DISTANCES STABLES ET HOMEOMORPHISMES UNIFORMES

PAR
YVES RAYNAUD

ABSTRACT

We introduce here the notion of superstable Banach space, as the superproperty associated with the stability property of J. L. Krivine and B. Maurey. If E is superstable, so are the $L^p(E)$ for each $p \in [1, +\infty[$. If the Banach space X uniformly imbeds into a superstable Banach space, then there exists an equivalent invariant superstable distance on X; as a consequence X contains subspaces isomorphic to l^p spaces (for some $p \in [1,\infty[$). We give also a generalization of a result of P. Enflo: the unit ball of c_0 does not uniformly imbed into any stable Banach space.

Introduction

La notion d'espace de Banach stable a été introduite par J. L. Krivine et B. Maurey dans [13]. Rappelons qu'un espace de Banach séparable E est dit stable quand pour toutes suites $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(y_m)_{m=1}^\infty$ bornées dans E, et tous ultrafiltres $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur $\mathbf{N}$, on a:

$$\lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathcal{V}} \lim_{n,\mathcal{U}} \|x_n + y_m\|.$$

Rappelons aussi que si E est un espace stable, il en est de même des $L^p(E)$ (pour tout $p \in [1,\infty[$), et que E contient, pour tout $\varepsilon > 0$, et un certain $p \in [1,\infty[$, un sous-espace $(1+\varepsilon)$-isomorphe à l^p.

On s'intéresse dans cet article à la superpropriété (selon la terminologie de [11]) associée à la propriété de stabilité:

Definition 0.1. L'espace de Banach E est dit *superstable* lorsque tout espace de Banach finiment représentable dans E est stable (ou, ce qui revient au même, toute ultrapuissance de E est stable).

Received July 21, 1981 and in revised form April 27, 1982

(On renvoie à [11], [4], [15] pour les notions de finie représentabilité et d'ultrapuissance d'espaces de Banach).

Il est clair que les espaces vectoriels normés de dimension finie sont superstables, ainsi que les espaces de Hilbert. Il en est de même des espaces L^p (de fonctions numériques), car leurs ultrapuissances sont encore des espaces L^p. (Voir [4]). Un peu plus généralement les espaces d'Orlicz "proches" des espaces L^p, envisagés dans [4], sont superstables.

Le principal résultat de conservation de la superstabilité exposé ici est le suivant:

THÉORÈME 0.1. *Si E est un espace de Banch superstable, alors pour tout espace probabilisé (Ω,Σ,P), et tout $p\in[1,\infty[$, l'espace $L^p(\Omega,\Sigma,P;E)$ est superstable.*

La démonstration de ce résultat utilise la notion de "fonction superstable", et notamment le théorème de représentation des fonctions numériques superstables, exposés dans la partie I ci-dessous.

On développe ensuite une application, suggérée par B. Maurey, à la théorie des "homéomorphismes uniformes" entre espaces de Banach (voir notamment [7]). Un plongement uniforme $\phi: X\rightarrow Y$ de l'espace métrique X dans l'espace métrique Y est une injection qui est un isomorphisme pour les structures uniformes de X et $\phi(X)$. Par ailleurs, disons qu'une distance δ sur un ensemble X est stable (resp. superstable) quand les restrictions de δ aux produits $B\times B'$ de δ-bornés de X sont stables (resp. superstables) comme fonctions de deux variables (cf. partie I ci-dessous). On a alors le:

THÉORÈME 0.2. *Soit E un espace de Banach supersable. Sur tout espace de Banach se plongeant uniformément dans E, il existe une distance invariante (par translation), uniformément équivalente à la norme, et superstable.*

La question reste ouverte de savoir si dans ces conditions X possède en fait une norme équivalente stable.

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème 0.2, E contient des sous espaces isomorphes à un espace l^p (pour un $p\in[1,\infty[$).*

En effet, si l'espace de Banach X possède une distance équivalente invariante et stable, on peut, mutatis mutandis, lui appliquer la méthode mise en oeuvre dans [13] pour les espaces de Banach stables, de sorte que X contient des sous-espaces isomorphes à un espace l^p (pour un $p\in[1,\infty[$): cf. le th. 4.1.

Le cas $p=\infty$ dans ce qui précède est exclus par l'étude des plongements uniformes de c_0. Rappelons que P. Enflo a montré (voir [6]) que c_0 (et même la boule-unité de c_0) ne se plonge pas uniformément dans un espace de Hilbert. Il résulte de la partie V ci-dessous qu'en fait la boule unité B_{c_0} ne se plonge uniformément dans aucun espace stable. En fait, si la boule-unité B_X d'un espace de Banach X possède une distance équivalente stable, alors toute suite basique écartable de X est inconditionnelle (et de plus tout modèle étalé basique est inconditionnel).

I. Fonctions superstables de deux variables

Dans cette partie on considère des fonctions de deux variables, définies sur des produits $X \times Y$ d'ensembles sans structure particulière, et à valeurs dans un borné de $\mathbf{R}$.

(A) *Compléments sur les fonctions stables*

On dira que la fonction $f : X \times Y \to \mathbf{R}$, bornée, est stable lorsque, pour toutes familles $(x_i)_{i\in I} \subset X$, $(y_j)_{j\in J} \subset Y$, et tous ultrafiltres $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur I et J, on a:

$$\lim_{i,\mathcal{U}} \lim_{j,\mathcal{V}} f(x_i, y_j) = \lim_{j,\mathcal{V}} \lim_{i,\mathcal{U}} f(x_i, y_j).$$

Il est facile de vérifier que chacune des conditions suivantes équivaut à la stabilité de f:

(i) Pour toutes *suites* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $(y_m)_{m=1}^{\infty} \subset Y$, *il existe* deux ultrafiltres non triviaux sur $\mathbf{N}$, pour lesquels la commutation des limites a lieu.

(ii) Pour toutes suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ dans X, resp. Y, on a:

$$\inf_{n>m} f(x_n, y_m) \leqq \sup_{n\leqq m} f(x_n, y_m).$$

Les fonctions bornées séparément continues sur un produit de compacts sont stables. Inversement, si $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ est bornée et stable, on lui associe deux compacts K, L, adhérences pour la convergence simple de l'ensemble des fonctions partielles $\tau_x^g : y \rightsquigarrow f(x, y)$, x décrivant X (resp. des $\tau_y^d : x \rightsquigarrow f(x, y)$, y décrivant Y), dans $\mathbf{R}^Y$ (resp. dans $\mathbf{R}^X$). Les éléments de K (resp. de L) sont appelés les "types à gauche" (resp. "à droite") de la fonction f. Il existe alors une unique fonction $\hat{f} : K \times L \to \mathbf{R}$ séparément continue bornée rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\tau^g"'] & \times & Y \arrow[d, "\tau^d"'] \arrow[dr, "f"] & \\
K & \times & L \arrow[r, "\hat{f}"'] & \mathbf{R}
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE 1.1. L'espace de Banach E (séparable ou non) est dit stable lorsque l'application $B_E \times B_E \to \mathbf{R}$, $(x,y) \rightsquigarrow \|x+y\|_E$ est stable.

EXEMPLE 1.2. Si E est un espace de Banach, considérons l'application $f_E : B_E \times B_{E^*} \to \mathbf{R}$, $(x,y^*) \rightsquigarrow \langle x,y^*\rangle_{E\times E^*}$. Elle est stable si et seulement si E est réflexif. (Il suffit pour le voir d'appliquer le critère de James (cf. [1], prop. 2).) Plus généralement:

EXEMPLE 1.3. Si $T: E \to F$ est un opérateur entre espaces de Banach, considérons l'application $f_T : B_F \times B_{G^*} \to \mathbf{R}$, $(x,y^*) \rightsquigarrow \langle Tx,y^*\rangle_{G\times G^*}$. Elle est stable si et seulement si T est faiblement compact.

L'exemple 1.2 constitue la situation la plus générale, car on a la:

PROPOSITION 1.1. *Toute fonction numérique bornée stable peut se mettre sous la forme* : $f(x,y) = C.\langle u(x), v(y)\rangle_{G\times G^*}$, *où G est un espace de Banach réflexif, et u,* resp. *v, est une application de X dans B_G* (resp. *de Y dans B_{G^*}*).

PREUVE. Notons $l^\infty(X)$, resp. $l^1(X)$ l'espace des familles bornées, resp. sommables, de réels indexées par X. Si $f \in l^\infty(X\times Y)$, $\mu \in l^\infty(X)^*$, $\nu \in l^\infty(Y)^*$, on notera $\langle \mu_{(x)}, \langle \nu_{(y)}, f(x,y)\rangle\rangle$ la valeur de μ sur la fonction $x \rightsquigarrow \langle \nu, f(x,\cdot)\rangle$ (qui est dans $l^\infty(X)$). On utilise le:

LEMME 1.1. *Avec les notations qui précèdent, si f est stable, on a l'égalité* :

$$(1) \qquad \langle \mu_x, \langle \nu_y, f(x,y)\rangle\rangle = \langle \nu_y, \langle \mu_x, f(x,y)\rangle\rangle .$$

Notons $F(\mu,\nu)$ cette valeur : alors la restriction de F à $B_{l^\infty(X)^*} \times B_{l^\infty(Y)^*}$ est stable.

Admettons ce lemme pour l'instant, et considérons l'opérateur: $T: l^\infty(X)^* \to l^\infty(Y)$, $\mu \rightsquigarrow T\mu$, défini par: $\forall y \in Y$, $T\mu(y) = \langle \mu_x, f(x,y)\rangle$. D'après le lemme et l'exemple 1.3, T est faiblement compact, et se factorise donc par un espace réflexif G (d'après [5]) selon: $l^\infty(X)^* \xrightarrow{U} G \xrightarrow{V} l^\infty(Y)$.

Soient ε_x (resp. ε_y) la forme linéaire "évaluation en x" (resp. en y), on pose: $u(x) = U(\varepsilon_x)$; $v(y) = V^*(\varepsilon_y)$, et l'on a:

$$f(x,y) = \langle \varepsilon_y, T\varepsilon_x\rangle = \langle V^*(\varepsilon_y), U(\varepsilon_x)\rangle = \langle u(x), v(y)\rangle .$$

PREUVE DU LEMME 1.1. L'égalité (1) est évidente lorsque $\mu \in l^1(X)$, $\nu \in l^1(Y)$, considérés comme sous-espaces de $l^\infty(X)^*$, $l^\infty(Y)^*$. Dans le cas général, tout élément μ de $B_{l^\infty(X)^*}$ s'écrit $\mu = \lim_{i,\mathcal{U}} \mu_i$, où $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille de points de $B_{l^1(X)}$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I, et la limite est prise au sens préfaible $\sigma(l^\infty(X)^*, l^\infty(X))$. De même, pour tout $\nu \in B_{l^\infty(Y)^*}$, on a: $\nu = \lim_{j,\mathcal{V}} \nu_j$, avec $(\nu_j)_{j\in J} \subset B_{l^1(Y)}$. Comme il est clair que:

$$\langle \mu_{(x)}, \langle \nu_{(y)}, f(x,y)\rangle\rangle = \lim_{i,\mathcal{U}} \lim_{j,\mathcal{V}} \langle \mu_{i_{(x)}}, \langle \nu_{j_{(y)}}, f(x,y)\rangle\rangle,$$

$$\langle \nu_{(y)}, \langle \mu_{(x)}, f(x,y)\rangle\rangle = \lim_{j,\mathcal{V}} \lim_{i,\mathcal{U}} \langle \nu_{j_{(y)}}, \langle \mu_{i_{(x)}}, f(x,y)\rangle\rangle,$$

on voit que pour montrer (1), il suffit de vérifier que F, qui est bien définie sur $l^1(X)\times l^1(Y)$, est stable sur $B_{l^1(X)}\times B_{l^1(Y)}$.

Or si $(\mu_m)_{m=1}^{\infty}\subset B_{l^1(X)}$ et $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}\subset B_{l^1(Y)}$, posons: $S=\bigcup_{m=1}^{\infty}\operatorname{Supp}(\mu_m)$ et $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{Supp}(\nu_n)$; soient $K_{S,T}$ et $L_{S,T}$ les compacts de types de la restriction $f_{|S\times T}$ (qui sont métrisables, car S et T sont dénombrables). On détermine aisément des mesures $\hat{\mu}_m$ sur $K_{S,T}$, $\hat{\nu}_n$ sur $L_{S,T}$ (en fait dans $B_{l^1(K_{S,T})}$, resp. $B_{l^1(L_{S,T})}$) telles que:

$$F(\mu_m,\nu_n)=\int_{K_{S,T}\times L_{S,T}} f_{|S\times T}(\sigma,\tau)\,d\hat{\mu}_m(\sigma)\,d\hat{\nu}_n(\tau).$$

Or si $\phi: K\times L\to\mathbf{R}$ est une fonction séparément continue sur un produit de compacts métrisables, on voit facilement (cf. [13], lemme II.1) qu'elle est de 1$^{\text{ère}}$ classe de Baire, d'où l'application $\mathcal{M}(K)\times\mathcal{M}(L)\to\mathbf{R}$, associant aux mesures (μ,ν) l'intégrale $\int_{\mathcal{M}(K)\times\mathcal{M}(L)}\phi(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$ est bien définie, et par conséquent (d'après le th. de Fubini) est séparément préfaiblement continue en μ,ν. Appliquant cette remarque à $f_{|S\times T}$, on voit que:

$$\lim_{m,\mathcal{U}}\lim_{n,\mathcal{V}} F(\mu_m,\nu_n)=\lim_{n,\mathcal{V}}\lim_{m,\mathcal{U}} F(\mu_m,\nu_n), \qquad \text{d'où finalement (1).}$$

Le fait que F soit stable (en restriction aux boules-unité) résulte du fait qu'elle est manifestement séparément préfaiblement continue.

(B) *Fonctions superstables*

Etant donnée une fonction $f: X\times Y\to\mathbf{R}$ bornée et un ultrafiltre $\mathcal{D}$ sur un ensemble I, on définit l'ultrapuissance $f^I/\mathcal{D}: X^I/\mathcal{D}\times Y^I/\mathcal{D}\to\mathbf{R}$ de la manière suivante:

$X^I/\mathcal{D}$ est le quotient de X^I par la relation d'équivalence:

$$(x_i)_{i\in I}\sim(x'_i)_{i\in I}\Leftrightarrow\{i\in I/x_i=x'_i\}\in\mathcal{D}.$$

$Y^I/\mathcal{D}$ est défini de même, et enfin: $f^I/\mathcal{D}(\xi,\eta)=\lim_{i,\mathcal{D}} f(x_i,y_i)$, quand $\xi=$ classe de $(x_i)_i$, $\eta=$ classe de $(y_i)_i$.

Remarque. Considérons le cas de l'application $\phi_E: B_E\times B_E\to\mathbf{R}$, $(x,y)\rightsquigarrow\|x+y\|_E$ associée à un espace de Banach E. La boule-unité $B_{E^I/\mathcal{D}}$ de l'ultrapuissance $E^I/\mathcal{D}$ (au sens de [4]) de l'espace de Banach E s'identifie à un quotient $((B_E)^I/\mathcal{D})/\mathcal{R}$ de l'ensemble $(B_E)^I/\mathcal{D}$ avec:

$$\overline{(x_i)}\,\mathcal{R}\,\overline{(x_i')} \Leftrightarrow \lim_{i,\mathcal{D}} \|x_i - x_i'\| = 0.$$

On a le diagramme commutatif ci-contre, où π est la surjection naturelle.

$$\begin{tikzcd} (B_E)^I/\mathcal{D} \times (B_E)^I/\mathcal{D} \arrow[d, "\pi \times \pi"'] \arrow[dr, "(\phi_E)^I/\mathcal{D}"] & \\ B_{(E^I/\mathcal{D})} \times B_{(E^I/\mathcal{D})} \arrow[r, "\phi_{(E^I/\mathcal{D})}"'] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

DÉFINITION 1.1. L'application bornée $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ est dite *superstable* si toute ultrapuissance de f est stable.

Aux exemples 1.1 à 1.3 correspondent les exemples suivants:

EXEMPLE 1.4. Espaces de Banach superstables. (Voir déf. 0.1).

EXEMPLE 1.5. "f_E est superstable" équivaut à: "E est superréflexif".

EXEMPLE 1.6. "f_T est superstable" équivaut à: "T est super-faiblement compact" (i.e. ses ultrapuissances $T^I/\mathcal{D}$ sont toutes faiblement compactes).

C'est la notion d'opérateur "uniformément convexifiant" introduite par B. Beauzamy dans [2].

C'est l'exemple 1.6 qui représente la situation la plus générale (et non l'exemple 1.5, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions stables).

PROPOSITION 1.2. *Toute fonction numérique bornée superstable $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ peut se mettre sous la forme: $f(x,y) = \langle Tu(x), v(y)\rangle_{G\times G^*}$, où:*

$T: F \to G$ est un opérateur uniformément convexifiant;

u, resp. v, est une application $X \to B_F$, resp. $Y \to B_{G^*}$.

La proposition se déduit du lemme suivant, comme la prop. 1.1 se déduisait du lemme 1.1.

LEMME 1.2. *Soit: $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ une application bornée superstable; $F: l^\infty(X)^* \times l^\infty(Y)^* \to \mathbf{R}$ l'application associée par le lemme 1.1; notons Λf la restriction de F aux boules-unité de $l^\infty(X)^*$ et $l^\infty(Y)^*$.*

Alors Λf est superstable.

PREUVE. (a) Supposons avoir montré qu'il existe deux applications s et t rendant le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(B_{l^\infty(X)^*})^I/\mathcal{D} \times (B_{l^\infty(Y)^*})^I/\mathcal{D} \arrow[d, "s \times t"'] \arrow[dr, "(\Lambda f)^I/\mathcal{D}"] & \\
B_{l^\infty(X^I/\mathcal{D})^*} \times B_{l^\infty(Y^I/\mathcal{D})^*} \arrow[r, "\Lambda(f^I/\mathcal{D})"'] & \mathbf{R}
\end{tikzcd}$$

On a alors les implications suivantes:

f superstable $\Rightarrow f^I/\mathcal{D}$ stable $\Rightarrow \Lambda(f^I/\mathcal{D})$ stable (lemme 1.1) $\Rightarrow (\Lambda f)^I/\mathcal{D}$ stable (diagramme ci-dessus), d'où Λf est superstable, et le lemme 1.2 s'ensuit.

(b) Montrons l'existence de s et t. On a des plongements canoniques (linéaires isométriques):

$$u : l^\infty(X)^{*I}/\mathcal{D} \to (l^\infty(X)^I/\mathcal{D})^*; \qquad v : l^\infty(Y)^{*I}/\mathcal{D} \to (l^\infty(Y)^I/\mathcal{D})^*,$$

$$h : l^\infty(X)^I/\mathcal{D} \to l^\infty(X^I/\mathcal{D}); \qquad k : l^\infty(Y)^I/\mathcal{D} \to l^\infty(Y^I/\mathcal{D}),$$

définis de la manière suivante: si $\hat{\mu} = \overline{(\mu_i)_i} \in l^\infty(X)^{*I}/\mathcal{D}$, $\hat{\phi} = \overline{(\phi_i)_i} \in l^\infty(X)^I/\mathcal{D}$ et $\hat{x} = \overline{(x_i)_i} \in X^I/\mathcal{D}$, on pose:

$$\langle u(\hat{\mu}), \hat{\phi}\rangle = \lim_{i,\mathcal{D}} \langle \mu_i, \phi_i\rangle; \qquad h(\hat{\phi})(\hat{x}) = \lim_{i,\mathcal{D}} \phi_i(x_i)$$

(et les définitions analogues pour v et k).

Le théorème de Hahn–Banach donne des sections (non linéaires) conservant la norme, σ et τ, aux projections h^* et k^*, transposées de h et k. Posons $S = \sigma \circ u$, $T = \tau \circ v$: ce sont encore des applications (non linéaires) conservant la norme:

$$S : l^\infty(X)^{*I}/\mathcal{D} \to l^\infty(X^I/\mathcal{D})^*; \qquad T : l^\infty(Y)^{*I}/\mathcal{D} \to l^\infty(Y^I/\mathcal{D})^*.$$

Si F est l'application associée à f par le lemme 1.1, un calcul facile montre que:

$$\forall \hat{\mu} \in l^\infty(X)^{*I}/\mathcal{D}, \quad \forall \hat{\nu} \in l^\infty(Y)^{*I}/\mathcal{D},$$

$$F^I/\mathcal{D}(\hat{\mu}, \hat{\nu}) = \langle (S\hat{\mu})_{(\hat{x})}, \langle (T\hat{\nu})_{(\hat{y})}, f^I/\mathcal{D}(\hat{x}, \hat{y})\rangle\rangle. \tag{2}$$

Les restrictions de S et T aux boules unité permettent alors de trouver s et t (après un passage au quotient comme dans la remarque ci-dessus).

II. Espaces de Banach superstables

L'objet de cette partie est de montrer le théorème 0.1. Le lemme qui suit permet d'appliquer la proposition 1.2 à des fonctions définies sur tout l'espace et d'en déduire le théorème 0.1 par intégration.

LEMME 2.1. *Soit E un espace de Banach superstable.*

(i) *Si $p \in [1,2[$, il existe une fonction $\psi : E \times E \to \mathbf{R}$ bornée superstable, telle que :*

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \|x\|^{p/2} \cdot \|y\|^{p/2} \cdot \psi(x,y). \tag{3}$$

(ii) *Plus généralement pour tout $p \in [1,\infty[$, il existe un entier $k = k(p)$ et des réels α_i, $0 < \alpha_i < p$ $(i = 1,\cdots,k)$, ainsi que des fonctions superstables ψ_i : $E \times E \to \mathbf{R}$, tels que :*

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^{k} \|x\|^{\alpha_i} \cdot \|y\|^{p-\alpha_i} \cdot \psi_i(x,y). \tag{4}$$

PREUVE. (i) *Le cas $1 \leqq p < 2$*

On pose:

$$\psi_E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p}{\|x\|^{p/2} \cdot \|y\|^{p/2}} & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont non nuls,} \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{cases}$$

D'après [13] (lemme II–2), ψ_E est bornée, et plus précisément:

$$\psi_E(x,y) \leqq C(p) \cdot \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} \wedge \frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^{1-p/2} \tag{5}$$

et de plus, si E est stable, alors ψ_E est stable.

Supposons que ψ_E ne soit pas superstable.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et, pour tout N, deux familles $(x_i^N)_{i=1}^N$, $(y_j^N)_{j=1}^N$, dans E telles que:

$$\operatorname*{Inf}_{1 \leqq i < j \leqq N} \psi_E(x_i^N, y_j^N) \geqq \operatorname*{Sup}_{1 \leqq j \leqq i \leqq N} \psi_E(x_i^N, y_j^N) + \varepsilon. \tag{6}$$

(Comme on le voit facilement au moyen de la condition (ii) équivalente à la stabilité, cf. I.A). On peut supposer les x_i^N et y_j^N non nuls.

A fortiori l'une des inégalités suivantes est vérifiée:

$$\operatorname*{Inf}_{1 \leqq i < j \leqq N} \psi_E(x_i^N, y_j^N) \geqq \varepsilon/2, \tag{7a}$$

$$\operatorname*{Sup}_{1 \leqq j \leqq i \leqq N} \psi_E(x_i^N, y_j^N) \leqq -\varepsilon/2. \tag{7b}$$

D'autre part ψ_E est homogène de degré 0. On peut donc supposer que:

$\|x_1^N\| = 1$, dans le cas où (7a) est vérifiée;

$\|x_N^N\| = 1$, dans le cas où (7a) n'est pas vérifiée.

Supposons être dans le premier cas; de $\psi_E(x_1^N, y_j^N) \geqq \varepsilon/2$ ($\forall j = 2, \cdots, N$), on tire grâce à (5):

$$(8) \qquad 0 < m(\varepsilon, p) \leqq \|y_j^N\| \leqq \frac{1}{m(\varepsilon, p)}, \qquad \text{avec } m(\varepsilon, p) = \left(\frac{\varepsilon}{2C(p)}\right)^{2/(2-p)}$$

Puis de $\psi_E(x_i^N, y_N^N) \geqq \varepsilon/2$, on tire de même:

$$(9) \qquad 0 < m(\varepsilon, p)^2 \leqq \|x_i^N\| \leqq \frac{1}{m(\varepsilon, p)^2}$$

($\forall i = 1, \cdots, N-1$). On a des inégalités analogues si (7b), et non (7a), a lieu. Selon un procédé standard, on pose $x_i^N = 0$ (resp. $y_j^N = 0$) pour $i > N$ (resp. $j > N$), et on considère dans une ultrapuissance $\tilde{E} = E^{\mathbf{N}}/\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ étant un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$) les éléments $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_j$, images des suites bornées $(x_i^N)_{N=1}^{\infty}$ et $(y_j^N)_{N=1}^{\infty}$. D'après (8) et (9), on a $\tilde{x}_i \neq 0$, $\tilde{y}_j \neq 0$, et il est alors immédiat que:

$$\psi_{\tilde{E}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) = \lim_{N,\mathcal{D}} \psi_E(x_i^N, y_j^N),$$

de sorte que d'après (6):

$$\operatorname*{Inf}_{1 \leqq i < j} \psi_{\tilde{E}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \geqq \operatorname*{Sup}_{i \geqq j \geqq 1} \psi_{\tilde{E}}(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) + \varepsilon.$$

Par conséquent $\psi_{\tilde{E}}$ n'est pas stable, donc $\tilde{E}$ n'est pas stable, et E n'est pas superstable.

(ii) *Le cas général*

Suivant [13], preuve du lemme II.3, on élève à la puissance l ($l \in \mathbf{N}_*, l > p/2$) l'égalité obtenue à partir de (3) pour l'exposant p/l (au lieu de p). On obtient alors (4), les ψ_i apparaissant comme produits de fonctions superstables, donc également superstables.

On peut donner maintenant la *preuve du théorème* 0.1.

Du lemme 2.1 et de la prop. 1.2 on déduit en effet que:

$$(10) \quad \forall x,y \in E: \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^{k} \|x\|^{\alpha_i} \cdot \|y\|^{p-\alpha_i} \cdot \langle T_i u_i(x), v_i(y)\rangle_{G_i \times G_i^*}$$

pour certains opérateurs $T_i : F_i \to G_i$ uniformément convexifiants, et certaines applications $u_i : E \to B_{F_i}$, $v_i : E \to B_{G_i^*}$.

Posons alors: $\tilde{u}_i(x) = \|x\|^{\alpha_i} \cdot u_i(x)$ et $\tilde{v}_i(y) = \|y\|^{p-\alpha_i} \cdot v_i(y)$; posons aussi $p_i = p/\alpha_i$ et $q_i = p/(p-\alpha_i)$ (exposant conjugué de p_i). On a: $1 < p_i < \infty$.

Si f et g sont deux fonctions étagées mesurables dans la boule-unité de $L^p(E)$, on constate que $\tilde{u}_i \circ f$, $\tilde{v}_i \circ g$ sont dans les boules-unité de $L^{p_i}(F_i)$, resp. de

$L^{q_i}(G_i^*)$. En remplaçant dans (10) x et y par $f(\omega)$ et $g(\omega)$, et en intégrant, on trouve:

$$\|f+g\|_{L^p(E)}^p - \|f\|_{L^p(E)}^p - \|g\|_{L^p(E)}^p = \sum_{i=1}^{k} \langle L^{p_i}(T_i)\tilde{u}_i \circ f, \tilde{v}_i \circ g \rangle \tag{11}$$

où $L^{p_i}(T_i)$ est l'opérateur $L^{p_i}(F_i) \to L^{p_i}(G_i)$, $h \rightsquigarrow T_i \circ h$.

C'est un opérateur uniformément convexifiant (voir [2], cor. de la prop. II–3) de sorte que dans (11) les crochets de dualité sont fonctions superstables de f, g (quand f, g sont dans la boule-unité de $L^p(E)$ et étagées). On conclut alors par densité des fonctions étagées mesurables dans $L^p(\Omega, E)$.

III. Plongements uniformes dans un espace superstable

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 0.2.

Soit $\phi : X \to E$ un plongement uniforme de l'espace de Banach X dans l'espace de Banach superstable E.

Posons pour tout $r \in \mathbf{R}_+$:

$$\Psi(r) = \sup_{\|x-y\|\leqq r} \leqq \phi(x) - \phi(y)\| \quad \text{et} \quad \psi(r) = \operatorname*{Inf}_{\|x-y\|\leqq r} \|\phi(x) - \phi(y)\|.$$

On a $0 < \psi(r) \leqq \Psi(r) < \infty$ pour tout $r > 0$, et ces fonctions sont croissantes, nulles en 0, continues en 0. On a:

$$\forall x, y \in X, \quad \psi(\|x-y\|) \leqq \|\phi(x) - \phi(y)\| \leqq \Psi(\|x-y\|). \tag{12}$$

Inversement (12), et les conditions qui précèdent sur ψ et Ψ entraînent Ψ entraînent la propriété de plongement uniforme pour ϕ.

Posons $d_{(0)}(x,y) = \|\phi(x) - \phi(y)\|_E$: c'est une distance (super)stable équivalente à la norme de X (mais non invariante en général).

Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-espaces U de X tels qu'il existe sur X tout entier une distance d_U telle que:

$$\begin{cases} \text{(a) } d_U \text{ soit invariante par translation par les vecteurs de } U. \\ \text{(b) } \forall x, y \in X,\ \psi(\|x-y\|) \leqq d_U(x,y) \leqq \Psi(\|x-y\|). \\ \text{(c) Il existe une ultrapuissance } L \text{ de } l^1[E] \text{ et une application} \\ \qquad u : X \to L \text{ telles que: } \forall x, y \in X,\ d_U(x,y) = \|u(x) - u(y)\|_L. \end{cases} \tag{13}$$

(La notation $l^1[E]$ désigne ici l'espace des suites $(x_n)_n \subset E$ telles que $\Sigma_n \|x_n\| < \infty$).

Il est clair que $(0) \in \mathcal{F}$. D'autre part $\mathcal{F}$ est un ensemble inductif (croissant) pour l'inclusion. En effet soit $\mathcal{K} = (U_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée pour l'inclusion d'éléments de $\mathcal{F}$, et soit $W = \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{K}$, plus fin que le filtre des sections finissantes, et posons: $\forall x, y \in X,\ d_W(x,y) = \lim_{U,\mathcal{U}} d_U(x,y)$.

La condition (13b) est vérifiée par d_W ; il en est de même de (13c) car $L^{\mathcal{K}}/\mathcal{U}$ est encore une ultrapuissance de $l^1[E]$ (cf. [4]). Enfin (13a) est évidemment vérifiée quand le vecteur de translation est dans $\bigcup_{i\in I} U_i$, puis par continuité de d_W (d'après 13b) quand il est dans W.

Appliquons maintenant le théorème de Zorn: soit $\hat{U}$ un élément maximal de $\mathcal{F}$, on va montrer que $\hat{U} = X$. Dans le cas contraire en effet soit $x_0 \in X \setminus \hat{U}$ et $V = \hat{U} \oplus \mathbf{R} \cdot x_0$. Posons:

$$(14)\quad \forall x, y \in X,\ \forall N \geqq 1,\quad d_V^N(x,y) = \frac{1}{2N^2+1} \sum_{k=-N^2}^{+N^2} d_{\hat{U}}\left(x + \frac{k}{N}\cdot x_0, y + \frac{k}{N}\cdot x_0\right).$$

On voit immédiatement que d_V^N vérifie (13b); elle vérifie aussi (13c), car si $L = l^1[E]^I/\mathcal{D}$, alors $l^1_{2N^2+1}[L] \approx (l^1_{2N^2+1}[l^1[E]])^I/\mathcal{D} \approx l^1[E]^I/\mathcal{D} = L$ (isométriquement). Enfin d_V^N vérifie (13a) approximativement, en ce sens que, comme un calcul simple le montre aisément:

$$(15)\quad \begin{aligned} |\lambda| \leqq N \Rightarrow & \left| d_V^N(x + \lambda x_0, y + \lambda x_0) - d_V^N(x,y) \right| \\ & \leqq 2\Psi\left(\frac{1}{N}\cdot \|x_0\|\right) + \frac{|\lambda|}{2N}\, \Psi(\|x - y\|). \end{aligned}$$

Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$, et posons $d_V(x,y) = \lim_{N,\mathcal{U}} d_V^N(x,y)$ alors d_V vérifie (13), donc $V \in \mathcal{F}$, ce qui est contradictoire. D'où $X \in \mathcal{F}$.

Soit B un d_X-borné de X, et L et u associés à d_X par (13c). Comme $u(B)$ est un borné de l'espace L superstable (cf. théorème 0.1), on voit que d_X, restreinte à $B \times B$, est superstable.

Remarque. La question reste ouverte de savoir si l'on peut, sous les hypothèses du théorème 0.2, trouver une norme équivalente stable sur X.

IV. Espaces de Banach possédant une distance équivalente invariante et stable

Théorème 4.1. *Si l'espace de Banach E possède une distance invariante uniformément équivalente à la norme et stable, il contient un sous-espace isomorphe à un espace l^p, pour un certain $p \in [1,\infty[$.*

La partie IV donne la preuve de l'existence d'un isomorphe d'un l^p ou de c_0 dans E; la partie V (théorème 5.1) excluera le cas de c_0.

La preuve, analogue à celle de [13], th. IV–1 dans ses grandes lignes, nécessite l'introduction d'un espace de types "plus grand" que celui associé naturellement à la distance invariante.

Il est clair qu'on peut supposer E séparable (ce qui ne sera utilisé que dans la proposition 4.1).

1. *Définition d'un espace de types agrandi*

Soit d la distance invariante sur E, et posons $N(x)=d(x,0)$: N est une fonction sous-additive et symétrique, et l'on a $d(x,y)=N(x-y)$.

Soit $Z=\mathbf{R}\times E$; à la fonction $\phi: E\times Z\to\mathbf{R}_+$, définie par: $\phi(x,\zeta)=d(\lambda x,y)$ lorsque $\zeta=(\lambda,y)$ on peut associer son espace de types à gauche Θ, défini selon le I.A comme adhérence des $\phi(x,\cdot)$, $x\in E$, mais non compact en général (sauf si d est bornée). On a une injection (homéomorphique) d'image dense $E\hookrightarrow\Theta$, $x\rightsquigarrow\tau_x=\phi(x,\cdot)$: τ_x est le "type réalisé en x". (τ_0 est appelé "type nul").

Cette définition permet d'introduire deux opérations analogues à celles de [13]:

* *Convolution.* $\Theta\times\Theta\to\Theta$, $(\sigma,\tau)\rightsquigarrow\sigma*\tau$, définie par:

$$\sigma*\tau=\lim_{i,\mathcal{U}}\lim_{j,\mathcal{V}}(x_i+y_j)\qquad\text{quand } \sigma=\lim_{i,\mathcal{U}}x_i$$

($(x_i)_i$ étant une famille dans E et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre) et $\tau=\lim_{j,\mathcal{V}}y_j$.

* *Dilatation.* $\mathbf{R}\times\Theta\to\Theta$, $(\rho,\sigma)\rightsquigarrow\rho\cdot\sigma$, définie par: $\rho\cdot\sigma(\lambda,y)=\sigma(\rho\lambda,y)$ pour tout $(\lambda,y)\in Z$. On a $\rho\cdot\sigma=\lim_{i,\mathcal{U}}\rho\cdot x_i$ quand $\sigma=\lim_{i,\mathcal{U}}x_i$.

La convolution est commutative, et séparément continue en ses arguments. La dilatation $(\rho,\sigma)\rightsquigarrow\rho\cdot\sigma$ est continue à droite. Si Θ^b est le sous-espace de Θ constitué par les types approchables par des familles de E bornées *en norme*, on constate que la dilatation est continue à gauche sur $\mathbf{R}\times\Theta^b$.

La fonction N se prolonge à Θ si l'on pose $N(\sigma)=\sigma(1,0)$ pour tout $\sigma\in\Theta$. Pour $M\in\mathbf{R}_+$, posons $\Theta_M=\{\sigma\in\Theta/N(\sigma)\leqq M\}$. C'est un compact de Θ.

Posons enfin $r_0=\operatorname{Sup}\{M>0\,|\,\text{la } d\text{-boule } B(0,M) \text{ est bornée en norme}\}$. Pour tout $M<r_0$, on a $\Theta_M\subset\Theta^b$. On dira qu'un type τ est *admissible* si $N(\tau)<r_0$.

2. *Modèle étalé associé à un type $\tau\in\Theta^b$*

Soit $\tau\in\Theta^b$ un type non réalisé. On met sur la somme directe algébrique $S=E\oplus\mathbf{R}\cdot\xi_1\oplus\mathbf{R}\cdot\xi_2\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}\cdot\xi_n\oplus\cdots$ (de E et une suite de copies de $\mathbf{R}$) la distance invariante d associée à la fonction sous-additive symétrique:

$$N(x+\lambda_1\cdot\xi_1+\lambda_2\cdot\xi_2+\cdots+\lambda_k\cdot\xi_k)=\lambda_1\cdot\tau*\lambda_2\cdot\tau*\cdots*\lambda_k\cdot\tau(1,x).$$

Il est clair que N est symétrique par rapport aux ξ_i ; si de plus le type τ est symétrique (i.e. $\tau = -\tau$), N est également inconditionnelle en les ξ_i :

$$N(x + \varepsilon_1\lambda_1\xi_1 + \varepsilon_2\lambda_2\xi_2 + \cdots + \varepsilon_k\lambda_k\xi_k) = N(x + \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_k\xi_k)$$

pour tout choix de signes (ε_i).

Si $\tau = \lim_{i,\mathcal{U}} x_i$, on a:

$$N(x + \lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_k\xi_k) = \lim_{i_1,\mathcal{U}} \lim_{i_2,\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_k,\mathcal{U}} N(x + \lambda_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}x_{i_k}).$$

La structure uniforme définie par N est normalbe, il suffit de poser:

$$\|x + \lambda_1\cdot\xi_1 + \cdots + \lambda_k\xi_k\| = \lim_{i_1,\mathcal{U}} \lim_{i_2,\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_k,\mathcal{U}} \|x + \lambda_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}x_{i_k}\|.$$

On vérifie aisément alors qu'il existe une norme $|||\quad|||$ sur S, symétrique inconditionnelle en les ξ_i et uniformément équivalente à d.

Soit F le complété de S (l'espace (F, d) est le "modèle étalé au dessus de E associé au type τ"). $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ est une base symétrique (de constante 1) pour la norme $|||\quad|||$ du sous-espace de F qu'elle engendre.

3. *Classes coniques minimales*

Une classe conique est, comme dans [13] une partie de Θ stable pour la convolution et la dilatation, fermée, et non réduite au type nul. Elle est dite admissible quand elle contient un type admissible (non nul).

LEMME 4.1. *Toute classe conique admissible contient une classe conique admissible minimale.*

PREUVE. Posons pour tout $r < r_0$: $S_r = \{\tau \in \theta / N(\tau) = r\}$. Si C est une classe conique admissible, alors $C \cap S_r \neq \emptyset$ (en effet si $0 < N(\tau) < r_0$, l'application $\lambda \rightsquigarrow N(\lambda\tau)$ est continue et $\underline{\lim}_{\lambda\to\infty} N(\lambda\tau) \geqq r_0$). $C \cap S_r$ étant un compact non vide, une application du théorème de Zorn permet de déduire le lemme 4.1.

Il est facile de voir qu'une classe conique admissible minimale, non triviale (i.e. non réduite à une droite de E) ne contient que des types symétriques.

PROPOSITION 4.1. (*On suppose E séparable*). *Toute classe admissible minimale non triviale C_0 est la classe conique engendrée par un type admissible symétrique* (*non nul*) τ *tel que* :

(P) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\exists \beta(\alpha) \in \mathbf{R}$, $1 \vee |\alpha| \leqq \beta \leqq 1 + |\alpha|$, *tel que* $\tau * \alpha\cdot\tau = \beta(\alpha)\cdot\tau$.

La preuve de cette proposition s'articule sur le:

LEMME 4.2. (suites "approximantes"). *Soit σ un type symétrique admissible. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ on peut trouver $\beta \in [1 \vee |\alpha|, 1 + |\alpha|]$ et une suite $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ de types symétriques dans la classe conique engendrée par σ, et tels que* :

(i) $\exists a, b \in \mathbf{R}_+$, *avec* $\forall n \in \mathbf{N}_*$, $0 < a \leqq N(\tau_n) \leqq b < r_0$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_{x\in E} |\tau_n * \alpha\tau_n(\lambda, x) - \beta \cdot \tau_n(\lambda, x)| = 0$.

La preuve de ce lemme se déduit avec des modifications évidentes de celle du lemme IV–4 de [13] (le point important étant la symétrie de la suite $(\xi_i)_i$ du modèle étalé associé à σ, relativement à $|||\quad|||$). On en déduit la proposition 4.1 en considérant le G_δ dense des points de continuité des fonctions $h_{\alpha,\lambda,x} : \tau \rightsquigarrow \tau * \alpha\tau(\lambda, x)$, sur le compact $K_0 = C_0 \cap \Theta_r$, de manière très analogue à la preuve du lemme IV–6 de [13].

4. *Types vérifiant la propriété* (P)

On appellera l^p-type, resp. c_0-type un élément $\tau \in \Theta$ non nul tel que:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \tau * \alpha\tau = (1 + |\alpha|^p)^{1/p} \cdot \tau \qquad (\text{resp.} = (1 \vee |\alpha|) \cdot \tau).$$

LEMME 4.3. *Un type symétrique admissible (non nul) τ qui vérifie la propriété* (P) (cf. proposition 4.1) *est un l^p-type ou un c_0-type.*

C'est l'analogue du lemme III–1 de [13], mais la preuve ne s'adapte pas au cas présent.

PREUVE. (a) *Calcul de τ^{*n}*

On a $\tau * \tau = \lambda \cdot \tau$ et $\tau * \tau * \tau = \mu \cdot \tau$ (avec $\lambda = \beta(1)$ et $\mu = \beta(\lambda)$).

Par récurrence on voit que:

$$\tau^{*(2^l)} = \lambda^l \cdot \tau \quad \text{et} \quad \tau^{*(3^k)} = \mu^k \cdot \tau.$$

Supposons que:

$$3^k \leqq 2^l < 3^{k+1}. \tag{16}$$

Comme la norme $|||\quad|||$ du modèle étalé F associé à τ est inconditionnelle, on a:

$$|||\xi_1 + \cdots + \xi_{3^k}||| \leqq |||\xi_1 + \cdots + \xi_{2^l}||| \leqq |||\xi_1 + \cdots + \xi_{3^{k+1}}|||. \tag{17}$$

Posons $a_l = |||\xi_1 + \cdots + \xi_{2^l}|||$, on a:

$$1 \leqq \left|\left|\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{3_{k+1}}}{a_l}\right|\right|\right| ;$$

donc il existe un $r > 0$ (ne dépendant pas de k ni de l) tel que:

$$r \leqq N\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{3^{k+1}}}{a_l}\right) = N\left[\left(\frac{\tau}{a_l}\right)^{*3^{k+1}}\right] = N\left(\frac{\mu^{k+1} \cdot \tau}{a_l}\right) = N\left(\frac{\mu^{k+1}}{a_l} \cdot \xi_1\right)$$

d'où il existe ρ,

$$0 < \rho \leqq \left|\left|\left| \frac{\mu^{k+1}}{a_l} \cdot \xi_1 \right|\right|\right| = \frac{\mu^{k+1}}{a_l} \cdot ||| \xi_1 ||| . \tag{18}$$

D'autre part:

$$N\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{2^l}}{\lambda^l}\right) = N\left(\frac{\tau^{*2^l}}{\lambda^l}\right) = N(\tau) = N(\xi_1) > 0 \tag{19a}$$

d'où il existe ρ',

$$0 < \rho' \leqq \left|\left|\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_l}{\lambda^l} \right|\right|\right| = \frac{a_l}{\lambda^l}. \tag{19b}$$

De (18) et (19) on déduit:

$$\frac{\mu^k}{\lambda^l} \geqq \frac{\rho\rho'}{\mu \, ||| \xi_1 |||}$$

(ρ et ρ' ne dépendant pas de k, l). De même, en utilisant l'inégalité de gauche dans (17), on obtiendrait une minoration de λ^l/μ^k, d'où finalement:

$$\exists a, b > 0, \quad \forall k, l \in \mathbf{N}_* \text{ tels que (16), } \quad \text{on a: } \quad a \leqq \frac{\mu^k}{\lambda^l} \leqq \frac{1}{b} . \tag{20}$$

On voit facilement que ceci entraîne l'existence de $\alpha \geqq 0$, tel que $\lambda = 2^\alpha$, $\mu = 3^\alpha$. Plus généralement on verrait de même que: $\tau^{*n} = n^\alpha \cdot \tau$. On pose $p = 1/\alpha$.

(b) *Cas* $p < \infty$

Soit $\mathbf{Q}_+^{1/p} = \{\rho \in \mathbf{R}_+ / \rho^p \in \mathbf{Q}\}$, alors pour tout $\rho = (j/k)^{1/p} \in \mathbf{Q}_+^{1/p}$, on a:

$$\begin{aligned} \tau * \rho\tau &= k^{-1/p}(k^{1/p} \cdot \tau * j^{1/p} \cdot \tau) = k^{-1/p}(\tau^{*k} * \tau^{*j}) \\ &= k^{-1/p}\tau^{*(k+j)} = \left(\frac{k+j}{k}\right)^{1/p} \cdot \tau = (1 + \rho^p)^{1/p} \cdot \tau. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathbf{Q}_+^{1/p}$ dans $\mathbf{R}_+$, et continuité, on a donc: $\tau * \rho\tau = (1 + \rho^p)^{1/p} \cdot \tau$ pour tout $\rho \in \mathbf{R}_+$, donc τ est un l^p-type.

(c) *Cas* $p = \infty$

On a donc $\tau * \tau = \tau$. Soit $\alpha < 1$ et $\beta = \beta(\alpha)$. Posons: $\pi_l = \tau * \alpha\tau * \alpha^2\tau * \cdots * \alpha^l\tau$. On voit aisément que:

$$\tau * (\alpha\tau * \alpha\tau) * (\alpha^2\tau * \alpha^2\tau) * \cdots * (\alpha^l\tau * \alpha^l\tau) * \alpha^{l+1}\tau = \pi_{l+1}.$$

D'autre part le premier membre s'écrit:

$$(\tau * \alpha\tau) * \alpha(\tau * \alpha\tau) * \cdots * \alpha^l(\tau * \alpha\tau) = \beta \cdot \pi_l.$$

Donc $\pi_{l+1} = \beta \cdot \pi_l$, et par conséquent: $\pi_l = \beta^l \cdot \pi_0 = \beta^l \cdot \tau$. D'où l'on a:

$$N\left(\frac{\xi_1 + \alpha\xi_2 + \cdots + \alpha^l \xi_{l+1}}{\beta^l}\right) = N\left(\frac{1}{\beta^l} \cdot \pi_l\right) = N(\tau) > 0. \tag{21}$$

D'autre part:

$$\left|\left|\left| \frac{\xi_1 + \alpha\xi_2 + \cdots + \alpha^l \xi_{l+1}}{\beta^l} \right|\right|\right| \leqq \frac{1}{\beta^l} \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \tag{22}$$

Comme la norme $|||\quad|||$ et la distance d associée à N sont équivalentes, les relations (21), (22) ne sont compatibles pour tout $l \in \mathbf{N}_*$ que si $\beta \leqq 1$. Donc $\beta = 1 = 1 \vee \alpha$, et τ est un c_0-type.

5. *Existence d'un isomorphe de l^p ou c_0 dans E*

Elle résulte de la proposition suivante (analogue du th. III–1 de [13]).

PROPOSITION 4.2. *Soit τ un l^p-type (ou un c_0-type) admissible.*

Pour $a > 0$ suffisamment petit et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ dans E telle que:

(i) $\frac{1}{2}N(a\tau) \leqq N(ay_1) \leqq 2N(a\tau) < r_0$.

(ii) $\forall n \in \mathbf{N}_*$, $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ *avec* $(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p)^{1/p} \leqq a$, *on a*:

$$\left| N\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right) - N\left(\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p\right)^{1/p} \cdot y_1\right) \right| \leqq \varepsilon.$$

(*On convient que* $(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p)^{1/p} = \bigvee_{j=1}^n |\lambda_j|$ *quand* $p = \infty$).

En prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}N(a\tau) \wedge (r_0 - 2N(a\tau))$, et en utilisant l'équivalence entre distance et norme, on voit que $(y_j)_j$ est équivalente à la base naturelle de l^p (resp. c_0).

La preuve de la proposition s'articule sur le lemme suivant (analogue de la prop. III–1 de [13]):

LEMMA 4.4. *Si $\tau \in \Theta^b$ et si $G \subset E$ est un sous-espace de dimension finie, alors pour tous r $(0 < r < r_0)$, $\varepsilon > 0$, $a < \infty$, il existe $y \in E$ tel que*:

(i) $(1-\varepsilon)N(\tau) \leqq N(y) \leqq (1+\varepsilon)N(\tau)$,
$(1-\varepsilon)N(a\tau) \leqq N(ay) \leqq (1+\varepsilon)N(a\tau)$;

(ii) $\forall x \in G$ *avec* $N(x) \leqq r$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ *avec* $|\lambda| \leqq a$, *on a*:

$$|\tau(\lambda, x) - \tau_y(\lambda, x)| \leqq \varepsilon.$$

PREUVE DU LEMME 4.4. Si $\tau = \lim_{i,\mathcal{U}} y_i$, avec $\mathrm{Sup}_i \|y_i\| < \infty$, alors cette limite est uniforme sur le compact $\{|\lambda| \leqq a\} \times \{N(x) \leqq r\}$ de $\mathbf{R} \times G$, d'après le théorème d'Ascoli.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2. Il est facile d'adapter celle du th. III–1 de [13]. Fixons r_1 et r_2 avec $0 < r_1 < N(\tau) < r_2 < r_0$, puis $a > 0$ tel que $2N(a\tau) < r_0$ et que:

$$|\lambda| \leqq a \quad \text{et} \quad N(x) \leqq r_2 \Rightarrow N(\lambda x) \leqq r_1.$$

Fixons aussi $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ avec $\varepsilon_j > 0$ et $\Sigma_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \varepsilon$. Supposant avoir construit $y_1, \cdots, y_{n-1}$, on peut, en appliquant le lemme 4.4 à l'espace $E \oplus \mathbf{R} - \xi_1$, trouver y_n, tel que: $r_1 \leqq N(y_n) \leqq r_2$, et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, avec $(\Sigma_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p + |\lambda|^p)^{1/p} \leqq a$ alors

$$\left| N\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j + \lambda \xi_1\right) - N\left(\left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p + |\lambda|^p\right)^{1/p} \cdot y_1\right)\right| \leqq \varepsilon'_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$$

(on impose aussi la condition (i) de la proposition 4.2).

V. Plongements uniformes de la boule unité dans un espace stable

Le principal résultat de cette partie est la:

PROPOSITION 5.1. *Si sur la boule-unité de l'espace de Banach E il existe une distance équivalente stable, alors dans E toute suite basique écartable $(e_n)_n$ est inconditionnelle.*

Dans cet énoncé les notions d'écartabilité et d'inconditionnalité s'entendent au sens "isomorphe" (ainsi $(e_j)_j$ est dite écartable quand $\exists K_1, K_2 > 0$ tels que $\forall n$ et $l_1 < \cdots < l_n$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R}$:

$$K_1 \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{l_j} \right\| \leqq \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| \leqq K_2 \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{l_j} \right\| \Bigg).$$

PREUVE. Soit $n \in \mathbf{N}_*$, et $(\varepsilon_j)_{j=1}^{n}$ un choix de signes, et posons:

$$A = \left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\| \quad \text{et} \quad B = \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j \right\|.$$

Supposons par exemple $A \geqq B$. Les points $(1/A) \cdot \Sigma_{j=1}^{n} e_j$ et $(1/A) \cdot \Sigma_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j$ sont dans $\overline{B_E}$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$. On a:

$$1 = \frac{1}{A} \left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\| \leqq K_1 \lim_{i_1, \mathcal{U}} \lim_{i_2, \mathcal{U}} \cdots \lim_{i_n, \mathcal{U}} \left\| \frac{1}{A} \sum_{l=1}^{n} e_{i_l} \right\|,$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{A} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j \right\| \geqq K_2 \lim_{i_1, \mathcal{U}} \lim_{i_2, \mathcal{U}} \cdots \lim_{i_n, \mathcal{U}} \left\| \frac{1}{A} \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l e_{i_l} \right\|.$$

Soit L le nombre de signes positifs parmi les ε_j, on a:

$$\|e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_n}\| \leqq C\|e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_L}-e_{i_{L+1}}-\cdots-e_{i_n}\|$$

où C ne dépend que de la constante de base de $(e_i)_i$.

Soient: $\rho_1>0$ tel que $d(x,y)\leqq\rho_1 \Rightarrow \|x-y\|\leqq 1/2CK_1$; ρ_2 le d-diamètre de la boule $\{x\in E/\|x\|\geqq B/AK_2\}$. On a:

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{i_1,\mathcal{U}} \lim\limits_{i_2,\mathcal{U}} \cdots \lim\limits_{i_n,\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum\limits_{l=1}^{L} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum\limits_{l=L+1}^{n} e_{i_l}\right) \geqq \rho_1, \\ \lim\limits_{i_1,\mathcal{U}} \lim\limits_{i_2,\mathcal{U}} \cdots \lim\limits_{i_n,\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum\limits_{\varepsilon_l=+1} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum\limits_{\varepsilon_l=-1} e_{i_l}\right) \leqq \rho_2. \end{array}\right.$$

Admettons pour l'instant que:

$$(24)\qquad \lim_{i_1,\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_n,\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum_{l=1}^{L} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum_{l=L+1}^{n} e_{i_l}\right) = \lim_{i_1,\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_n,\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum_{\varepsilon_l=+1} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum_{\varepsilon_l=-1} e_{i_l}\right).$$

(23) entraîne alors que $\rho_2\geqq\rho_1$. Soit $r>0$ tel que: $\|x-y\|\leqq r \Rightarrow d(x,y)\leqq\rho_1/2$. En raisonnant par l'absurde, on voit que: $2B/AK_2>r$, donc: $A/B<2/rK_2$, d'où l'inconditionnalité de $(e_n)_n$, et la proposition 5.1.

Montrons donc (24). Soit π la permutation de $\{1,\cdots,n\}$, appliquant $P=\{l/\varepsilon_l=+1\}$ sur $\{1,\cdots,L\}$ et $Q=\{l/\varepsilon_l=-1\}$ sur $\{L+1,\cdots,n\}$, en conservant l'ordre sur chacun de ces ensembles. On a:

$$(25)\ \lim_{i_1,\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_n,\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum_{\varepsilon_l=+1} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum_{\varepsilon_l=-1} e_{i_l}\right) = \lim_{i_{\pi(1)},\mathcal{U}} \cdots \lim_{i_{\pi(n)},\mathcal{U}} d\left(\frac{1}{A}\sum_{l=1}^{L} e_{i_l}, \frac{1}{A}\sum_{l=L+1}^{n} e_{i_l}\right).$$

(24) sera donc montrée si pour une telle permutation π, on a:

$$(26)\qquad \lim_{\substack{\mathcal{U}\times\cdots\times\mathcal{U} \\ (i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(n)})}} d(x_{i_1\cdots i_L}, y_{i_{L+1}\cdots i_n}) = \lim_{\substack{\mathcal{U}\times\cdots\times\mathcal{U} \\ (i_1,\cdots,i_n)}} d(x_{i_1\cdots i_L}, y_{i_{L+1}\cdots i_n})$$

pour toutes familles $(x_{i_1\cdots i_L})_{i_1,\cdots,i_L\in\mathbf{N}}$ et $(y_{i_{L+1},\cdots,i_n})_{i_{L+1},\cdots,i_n\in\mathbf{N}}$ dans E. Or (26) se montre par récurrence sur n. Pour $n=2$, c'est la propriété de stabilité de d. Si P ou Q contient deux entiers successifs k, $k+1$, on se ramène au cas d'une permutation sur $n-1$ objets en considérant $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ comme un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$ au moyen d'une indexation de $\mathbf{N}^2$ par $\mathbf{N}$ (voir [4] pour la notion d'ultrafiltre produit). Dans le cas contraire, on a par exemple: $n-2\in Q$, $n-1\in P$, $n\in Q$; alors $(n-1)=L$ et $\pi(n)=n$. Comme, par stabilité:

$$\lim_{L,\mathcal{U}} \lim_{n,\mathcal{U}} d(x_{i_1\cdots i_L}, y_{i_{L+1}\cdots i_n}) = \lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{L,\mathcal{U}} d(x_{i_1\cdots i_L}, y_{i_{L+1}\cdots i_n})$$

on est ramené au cas où $n-2$ et $n-1\in Q$, $n\in P$: c'est-à-dire au cas précédent.

Quelques applications de la proposition 5.1

(1) La base sommante $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de c_0 (définie par $s_n = \Sigma_{l=1}^{n} e_l$, $(e_l)_l$ étant la base naturelle) est écartable non inconditionnelle. D'où le:

THÉORÈME 5.1. *Sur la boule-unité de c_0, il n'existe pas de distance uniformément équivalente stable.*

Un plongement uniforme $\phi : B_{c_0} \hookrightarrow E$ définit naturellement une distance équivalente $d : d(x,y) = \|\phi(x) - \phi(y)\|$. D'où le:

COROLLAIRE. *Il n'existe aucun plongement uniforme de la boule-unité de c_0 dans un espace stable (et a fortiori dans un espace de Hilbert).*

PROPOSITION 5.2. *Soit E un espace de Banach dont la boule unité se plonge uniformément dans un espace de Banach stable F au moyen de $\phi : B_E \hookrightarrow F$. Alors* :

(a) *E ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0.*

(b) *Toute suite fondamentale de modèle étalé sur E (au sens de* [3]) *qui est basique, est inconditionnelle.*

(c) *Si E n'est pas réflexif, il possède un modèle étalé isomorphe à l^1.*

PREUVE. (b) Analogue à celle de la proposition 5.1.

(c) Si $(x_n)_n$ est une suite de E faiblement de Cauchy non convergente, et $(e_n)_n$ une suite fondamentale de modèle étalé construite sur $(x_n)_n$, alors $(e_n)_n$ est basique de type l_+^1 (cf. [8]), donc équivalente à la base canonique de l^1.

PROPOSITION 5.3. *Soit $\phi : B_E \hookrightarrow F$ comme dans la proposition précédente, F étant maintenant supposé superstable. Alors* :

(a) *E a un cotype.*

(b) *E est B-convexe si et seulement s'il est superréflexif.*

En effet on déduit de ϕ un plongement uniforme $\phi : B_{E^I/\mathcal{D}} \to F^I/\mathcal{D}$ pour toute ultrapuissance $E^I/\mathcal{D}$, en posant: $\phi(\overline{(x_i)_i}) = \overline{(\phi(x_i))_i}$. Comme (12) est vérifiée par ϕ, elle l'est pour Φ. Il résulte de ce qui précède que $E^I/\mathcal{D}$ ne contient pas c_0, donc E ne contient pas les l_n^{∞} uniformément, donc d'après [14] a un cotype. Le point (b) résulte clairement du point (c) de la proposition 5.2. Notons qu'il existe des espaces B-convexes non réflexifs (cf. [12]), d'où l'intérêt de la proposition 5.3.

REMARQUE 5.1. Avec des techniques analogues à celles de [9], on pourrait montrer que si E se plonge uniformément dans un espace superstable, alors E est faiblement séquentiellement complet.

Bibliographie

1. B. Beauzamy, *Espaces de Banach uniformément convexifiables*, Séminaire Maurey–Schwartz 1973–74, Exposé n° 14, Ecole Polytechnique, Paris.

2. B. Beauzamy, *Opérateurs uniformément convexifiants*, Studia Math. **57** (1976), 103–109.

3. A. Brunel, *Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach*, Séminaire Maurey-Schwartz, Exposés n° 15, 16, 17, 1973–74, Ecole Polytechnique, Paris.

4. D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Application des ultraproduits à l'étude des espaces et algèbres de Banach*, Studia Math. **41** (1973), 315–334.

5. W. J. Davis, T. Figuiel, W. B. Johnson and A. Pelczynski, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327.

6. P. Enflo, *On a problem of Smirnov*, Ark. Mat. **8** (1969), 107–109.

7. P. Enflo, *Uniform homeomorphism between Banach spaces*, Séminaire Maurey–Schwartz, 1975–76, Exposé n° 18, Ecole Polytechnique, Paris.

8. S. Guerre et J. T. Lapresté, *Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach*, Ann. Inst. Henri Poincaré **16** (1980), 339–347.

9. S. Guerre et J. T. Lapresté *Quelques propriétés des espaces de Banach stables*, C. R. Acad. Sci. Paris A **290** (1980), 645–647.

10. S. Guerre et J. T. Lapresté, Article à paraître dans Isr. J. Math.

11. R. C. James, *Some self-dual properties of normed linear spaces*, Ann. Math. Stud. **69** (1972), 159–176.

12. R. C. James, *A non-reflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral*, Isr. J. Math. **18** (1974), 145–155.

13. J. L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Isr. J. Math. **39** (1981), 273–295.

14. B. Maurey et G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45–90.

15. J. Stern, *Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach*, Séminaire Maurey-Schwartz, 1974–75, Exposé n° 7, Ecole Polytechnique, Paris.

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématique et Informatique
Laboratoire "Théories Géométriques"
2 place Jussieu
75251 Paris, Cedex 05, France